Дәріс 8
Жылу өткізгіштік теңдеудің жалпы шешімі

Айталық, G денесі ox өсінің бойында орналасқан жіңішке, біртекті, изотропты сыртқы ортадан оңашаланған өзек пішінді болсын делік. Осы өзектегі температураның үлестірілу заңы

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+A(x,t)$$

теңдеуімен, ал еркін жылу алмасуы болған жағдайда

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

теңдеуімен өрнектеледі.

Бұл жағдайда бастапқы және шекаралық шарттар:

$$u(x,t)\big|_{t=0}=f(x), \qquad (1)$$

$$u(x,t)\big|_{x=a}=0,\ u(x,t)\big|_{x=b}=0$$

түрінде жазылады.

Мұндағы a және b өзектің сәйкес сол және оң жақ ұштарының абсциссалары.

Егер ақырсыз өзек бүкіл ox өсімен беттесетін болса (яғни $a=-\infty$, $b=+\infty$),онда шекаралық шарттар қойылмайды. Бұл жағдайда бастапқы шарттың (1) берілуі жеткілікті болып табылады.

1. Өзектің ақырсыз болатын жағдайы.

$u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)$ теңдеуінің $D(-\infty<x<\infty, t>0)$ аймағындағы бастапқы шартты қанағаттандыратын

$u(x,t)\big|_{t=0}=f(x)\quad (-\infty<x<\infty)$

шешімі Пуассон интегралы арқылы өрнектеледі:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4a^2t}}d\tau.$$

2. Өзектің бір жағынан ғана шектелген жағдайы.

$u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)$ теңдеуінің $D(0<x<\infty,\ t>0)$ аймағындағы бастапқы: $u(x,t)\big|_{t=0}=f(x)$ және шекаралық: $u(x,t)\big|_{x=0}=\varphi(x)$ шарттарын қанағаттандыратын шешімін

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{+\infty}f(\tau)\left[e^{-\frac{(\tau-x)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(\tau+x)^2}{4a^2t}}\right]d\tau+\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\varphi(\eta)\cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\eta)}}(t-\eta)^{-\frac{3}{2}}d\eta$$

формуласы бойынша табамыз.

3. Өзектің екі жағынан бірдей шектелген жағдайы.

Теңдеудің $u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)$ $D(0<x<\ell, t>0)$ аймағындағы бастапқы: $u(x,t)\big|_{t=0}=f(x)$ және шекаралық шарттарды:

а) $u\big|_{x=0}=u\big|_{x=\ell}=0$; б) $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\ell}=0$

қанағаттандыратын шешімін табу қажет.

а) жағдайында есептің дербес шешімі мынадай қатар түрінде:

$$u(x,t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} b_\kappa e^{-\left(\frac{\kappa\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin\frac{\kappa\pi x}{\ell},$$

мұнда $$b_\kappa = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{\kappa\pi x}{\ell}dx,$$

ал б) жағдайында $$u(x,t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa e^{-\left(\frac{\kappa\pi a}{\ell}\right)^2 t} \cos\frac{\kappa\pi x}{\ell} + a_0,$$

мұнда $$a_\kappa = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\cos\frac{\kappa\pi x}{\ell}dx, \quad a_0 = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell f(x)dx$$

қатары түрінде жазылады.